

1. Soit

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -\pi < x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

Vérifier que  $f$  admet une série de Fourier et trouver cette série. Déduire la limite de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\pi(2n+1)^2}$

2. Soit  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ . On considère la fonction  $2\pi$ -périodique

$$f(x) = \cos \alpha x \quad \text{si } -\pi \leq x \leq \pi$$

(a) Déterminer la série de Fourier de  $f$

(b) Déduire les sommes des séries suivantes:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 - \alpha^2}; \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}; \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \alpha^2}; \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

3. Soit la fonction  $f$  de période  $2\pi$

$$f(x) = \operatorname{ch} \alpha x \quad x \in [-\pi, \pi], \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Trouver le développement en série de Fourier de  $f$  en déduire la somme de chacune des séries suivantes

$$S_1 = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + 1}; \quad S_2 = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 + 1}$$

N.B. On donne  $\int \operatorname{ch} \alpha x \cos \beta x dx = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} [\beta \operatorname{ch} \alpha x \sin \beta x + \alpha \operatorname{sh} \alpha x \cos \beta x]$

4. Soit  $\alpha \in [0, \pi]$  et  $f_\alpha$  la fonction  $2\pi$ -périodique et impaire

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} (\pi - \alpha)x & \text{si } x \in [0, \alpha] \\ \alpha(\pi - x) & \text{si } x \in [\alpha, \pi] \end{cases}$$

Donner le développement en série de Fourier de  $f_\alpha$  en déduire la somme de  $\sum_{n \geq 1} \sin n\alpha \cdot \frac{\sin nx}{n^2}$ . Trouver

$$S_1 = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{k-1} \sin(2k+1)\alpha}{(2k+1)^2}$$

5. Soit  $f(x) = x$

(a) Développer  $f$  en une série de Fourier en sin dans  $[0, \pi]$

(b) Développer  $|f|$  en une série de Fourier en cos dans  $[-\pi, \pi]$

6. On donne la fonction  $2\pi$ -périodique  $f(x) = x^2$  sur  $[-\pi, \pi]$

(a) Donner la série complexe de  $f$

(b) Déduire la série réelle de  $f$

- (c) Soit  $g(x) = x$  la fonction  $2\pi$ -périodique sur  $[-\pi, \pi]$ . Etablir une relation entre  $f$  et  $g$  et déduire la série réelle de  $g$
- (d) La série de  $g$  converge-t-elle vers  $g$  partout? Quelle condition faut-il imposer à  $g$  pour avoir une convergence partout.
- (e) Déduire la série de  $g$  au point  $\pi$
- 

7. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -périodique, paire, telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } t = \frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{\pi}{2} < t \leq \pi \end{cases}$$

- (a) Tracer le graphe de  $f$  sur  $[-2\pi, 2\pi]$
- (b) Etudier les conditions de Dirichlet relatives à  $f$  et donner le domaine de convergence de la série de Fourier de  $f$
- (c) Calculer les coefficients de Fourier de  $f$
- (d) Déduire la somme de la série  $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$
- (e) Utiliser la formule de Parseval pour déduire la somme de la série  $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$
- (f) En déduire la somme de la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$
-